Tentamen Algebra 3

20 december 2010, 09:00-12:00 uur, Zaal A1.10 *

Maak vijf van de volgende zes opgaven. Indien U er zes maakt worden de vijf best gemaakte geteld.

1) Laat K het ontbindingslichaam van $X^{12} - 1$ over $\mathbb{Q}$ zijn.
  i) Bereken de graad $[K : \mathbb{Q}]$ van de uitbreiding $K/\mathbb{Q}$.
  ii) Laat zien dat $\sigma^2 = \mathrm{id}$ voor elk element σ van de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
  iii) Beschrijf de deellichamen van K.

2)
  i) Laat n een natuurlijk getal zijn. Geef de definitie van het n-de cyklotomische polynoom Φ_n.
  ii) Bepaal Φ_{24}.
  iii) Hoeveel irreducibele factoren heeft $\Phi_{24} \pmod 5$ in $\mathbb{F}_5[X]$? Motiveer het antwoord.

3) Bereken de Galoisgroep van de volgende polynomen in $\mathbb{Q}[X]$.
  i) $f = X^3 - 21X + 7$;
  ii) $f = X^3 + X + 1$;
  iii) $f = X^4 + 1$.

4) Laat $f \in \mathbb{Q}[X]$ een irreducibel monisch polynoom van graad 5 zijn dat in het lichaam $\mathbb{R}$ van de reële getallen precies drie nulpunten heeft. Laat verder K het ontbindingslichaam van f over $\mathbb{Q}$ zijn.
  i) Laat $\alpha \in K$ een nulpunt van f zijn. Bewijs dat $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ geen Galoisuitbreiding is.
  ii) Bewijs: Complexe conjugatie $a + bi \mapsto a - bi$ op $\mathbb{C}$ definieert een niet-triviaal automorfisme van K.
  iii) Bewijs: de Galoisgroep van f bevat een 5-cykel en een transpositie.

5) Laat G een eindige groep zijn en p een priemgetal.
  i) Geef de definitie van een p-Sylow-ondergroep van G.
  ii) Laat N een normaaldeler van G zijn en S een p-Sylowondergroep van G. Bewijs dat $S \cap N$ een p-Sylowondergroep van N is.
  iii) Laat p en q twee priemgetallen zijn met $q > p$ en G een niet-abelse groep van orde pq. Bewijs dat een q-Sylowondergroep van G een normaaldeler is. Bewijs dat p een deler is van $q - 1$.

6) Laat L/K een eindige Galoisuitbreiding zijn met Galoisgroep G.
  i) Wanneer heet een afbeelding $f : G \to L^*$ een 1-cocykel van G met waarden in L^*?
  ii) Bewijs: Voor iedere 1-cocykel $f : G \to L^*$ is er een element $x \in L^*$ zodat $f(\sigma) = \sigma(x)/x$ voor iedere $\sigma \in G$.

---

* For the English version P.T.O.

Algebra 3 Exam

Try to do at least five of the following six problems. If you answer six of these then your five best answers will be counted.

1) Let K be the splitting field of $X^{12} - 1$ over $\mathbb{Q}$.
   i) Calculate the degree $[K : \mathbb{Q}]$ of the field extension $K/\mathbb{Q}$.
   ii) Show that $\sigma^2 = \mathrm{id}$ for every element σ of the Galois group $\mathrm{Gal}(L/K)$.
   iii) What are the subfields of K ?

2)
   i) Let n be a natural number. Give the definition of the nth cyclotomic polynomial Φ_n.
   ii) Determine Φ_{24}.
   iii) How many irreducible factors does Φ_{24} have in $\mathbb{F}_5[X]$?

3) Determine the Galois group of the following polynomials in $\mathbb{Q}[X]$.
   i) $f = X^3 - 21X + 7$;
   ii) $f = X^3 + X + 1$;
   iii) $f = X^4 + 1$.

4) Let $f \in \mathbb{Q}[X]$ be an irreducible monic polynomial of degree 5 that has exactly three roots in the field $\mathbb{R}$ of real numbers. Let K be the splitting field of f over $\mathbb{Q}$.
   i) Let $\alpha \in K$ be a zero of f. Prove that $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ is not a Galois extension.
   ii) Prove: complex conjugation $a+b\,i \mapsto a-b\,i$ on $\mathbb{C}$ defines a non-trivial automorphism of K.
   iii) Prove: the Galois group of f contains a 5-cycle and a transposition.

5) Let G be a finite group and p a prime number.
   i) Give the definition of a p-Sylow subgroup of G.
   ii) Let N be a normal subgroup of G and S a p-Sylow subgroup of G. Show that $S \cap N$ is a p-Sylow subgroup of N.
   iii) Let p and q be two prime numbers with $q > p$ and let G be a non-abelian group of order pq. Show that a q-Sylow subgroup of G is a normal subgroup. Show that p is a divisor of $q - 1$.

6) Let L/K be a finite Galois extension with Galois group G.
   i) When do we call a map $f : G \to L^*$ a 1-cocycle on G with values in L^*?
   ii) Prove: For every 1-cocycle $f : G \to L^*$ there exists an element $x \in L^*$ such that $f(\sigma) = \sigma(x)/x$ for every $\sigma \in G$.